4. Schularbeit, Klasse 7 2h

1. Bilde die Ableitung ohne Verwendung von Derive:

a) $y = e^{x^2} \Rightarrow y' = 2xe^{x^2}$

b) $y = e^{(x-5)}x^2 \Rightarrow y' = e^{(x-5)}x^2 + e^{(x-5)}2x$

c) $y = \frac{x^2}{e^x} \Rightarrow y' = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}}$

d) $y = x^3e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow 3x^2e^{-\frac{x}{2}} + x^3\left(-\frac{1}{2}\right)e^{\left(-\frac{x}{2}\right)}$

e) $y = \ln\left(x^2\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{x^2}2x$

f) $y = \frac{e^{5x}}{\ln\left(x^2-5\right)} \Rightarrow y' = \frac{5e^{5x}\ln\left(x^2-5\right) - e^{5x}\frac{2x}{x^2-5}}{\ln^2\left(x^2-5\right)} = \frac{e^{5x}\left(\left(x^2-5\right)5\ln\left(x^2-5\right) - 2x\right)}{\left(x^2-5\right)\ln^2\left(x^2-5\right)}$

g) $y = {}^2\log\left(x^2-4\right) \Rightarrow y' = \frac{2x}{\ln 2\left(x^2-4\right)}$

h) $y = 4^{4x-1}\,{}^3\log\left(4x\right) \Rightarrow 4*4^{4x-1}\ln 4\log\left(4x\right) + 4^{4x-1}\frac{4}{4x\ln 4}$

2. Beweis und Theorie:

a) Es sei die Ableitung der Logarithmus Funktion bekannt:
$f(x) = {}^a\log\left(x\right) \Rightarrow f'\left(x\right) = \frac{1}{x\ln a}$

Es sollen daraus folgende Ableitungen hergeleitet werden:

1) $f(x) = \ln x \Rightarrow f(x) = {}^e\log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x\ln e} = \frac{1}{x}$

2) $f(x) = e^x \Rightarrow \varphi(y) = \ln y \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = y = e^x$

b) Formuliere den Zwischenwertsatz und erkläre seine geometrische Aussage anhand einer Skizze

Satz: $Sei\ f\ stetig\ in\ [a,b] \Rightarrow \exists zu\ y\ mit\ y \in [f(a), f(b)]\ ein\ \xi \in [a,b] \ni f(\xi) = y$

Eine stetige Funktion nimmt in einem Intervall jeden Wert der zwischen den Funktionswerten in den Intervallgrenzen liegt mind. einmal an.

c) Formuliere den Mittelwertsatz und erkläre seine geometrische Aussage anhand einer Skizze

4. Mittelwertsatz : Es sei f stetig, differenzierbar in (a,b).

Dann $\exists\ \xi \in (a,b) \ni f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Bei einer stetigen Funktion gibt es im Intervall (a,b) mind. eine Stelle wo die Tangente zur Sehne parallel ist

3. Kurvendiskussion

Untersuche die Kurve $f(x) = x^2 e^x$

Df, Wf, Stetigkeit, Nullstellen, Extrema, Wendpunkte und Wendetangenten sind zu bestimmen!

$f(x) := x^2 \cdot e^x$

Stetig, da ein Produkt stetiger Funktionen!

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Die x Achse ist eine Asymptote

f(x) = 0

SOLVE(f(x) = 0, x, Real)

x = 0

$f'(x) = 0$

SOLVE(f'(x) = 0, x, Real)

$x = -2 \vee x = 0$

$f''(-2) = -2 \cdot e^{-2}$

Maximum

$f''(0) = 2$

Minimum

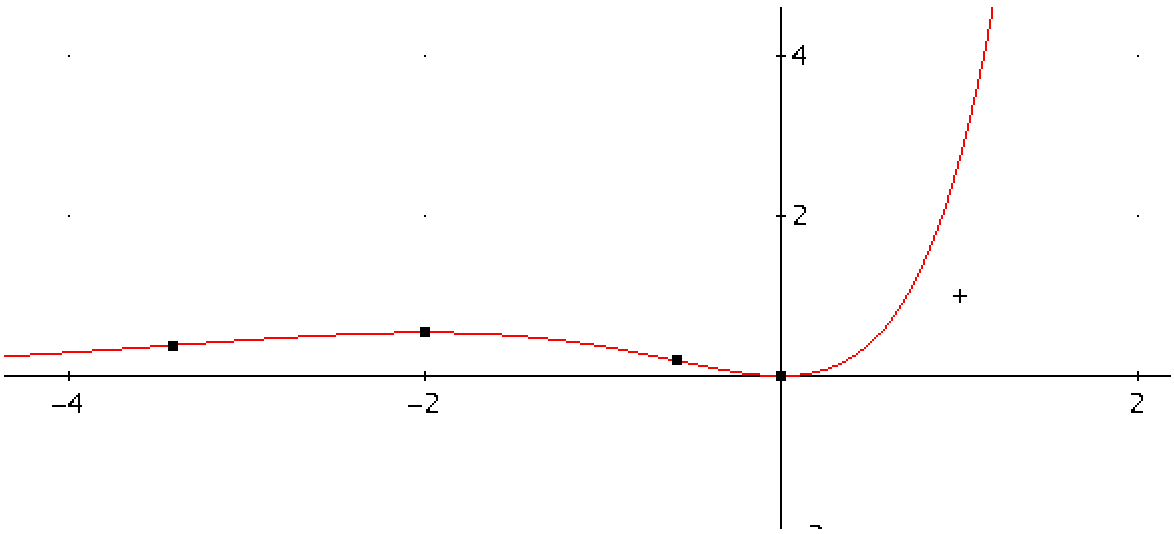
$f''(x) = 0$

SOLVE(f''(x) = 0, x, Real)

$x = -\sqrt{2} - 2 \vee x = \sqrt{2} - 2$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} - 2 & f(-\sqrt{2} - 2) \\ -2 & f(-2) \\ \sqrt{2} - 2 & f(\sqrt{2} - 2) \\ 0 & f(0) \end{bmatrix}$$

tw1 := f'(-3.414213562)·(x - -3.414213562) + f(-3.414213562)
tw2 := f'(-0.5857864376)·(x - -0.5857864376) + f(-0.5857864376)



4. Extremalproblem

Ein Schwimmkörper besteht aus einem Zylinder mit einerseits aufgesetzter Halbkugel, andererseits mit aufgesetztem Kegel, jeweils von gleichem Radius. Die Kegelhöhe beträgt 4/3 des Basiskreisradius. Es gibt keine Zwischenwände im Körper!
Wie sind die Abmessungen zu wählen, damit bei der Herstellung so wenig Blech wie möglich verwendet wird und der Inhalt 312π beträgt?

Hauptbedingung:

$$O(r,h,s) := 2\cdot r \cdot\pi + 2\cdot r\cdot\pi\cdot h + \pi\cdot r\cdot s$$

1. Nebenbedingung:

$$s^2 = r^2 + \left(\frac{4}{3}\cdot r\right)^2$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(s^2 = r^2 + \left(\frac{4}{3}\cdot r\right)^2,\ s,\ \mathrm{Real}\right)$$

$$s = -\frac{5\cdot r}{3} \vee s = \frac{5\cdot r}{3}$$

$$s := \frac{5\cdot r}{3}$$

2. Nebenbedingung:

$$312\cdot\pi = \frac{2}{3}\cdot r^3\cdot\pi + r^2\cdot\pi\cdot h + \frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot r\right)$$

$$h = \frac{2\cdot(1404 - 5\cdot r^3)}{9\cdot r^2}$$

$$h := \frac{2\cdot(1404 - 5\cdot r^3)}{9\cdot r^2}$$

Reduzierte Hauptbedingung:

$$O(r) := 2\cdot r^2\cdot\pi + 2\cdot r\cdot\pi\cdot h + \pi\cdot r\cdot s$$

$$O(r) := \frac{13\cdot\pi\cdot(r^3 + 432)}{9\cdot r}$$

$$O'(r) = 0$$

$$\mathrm{SOLVE}(O'(r) = 0,\ r,\ \mathrm{Real})$$

$$r = 6$$

$$h = \frac{2\cdot(1404 - 5\cdot 6^3)}{9\cdot 6^2}$$

$$h = 2$$

$$O(6) = 156\cdot\pi$$

$$O''(6) = \frac{26\cdot\pi}{3} \quad >0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}$$